Lycée Laymoune « 2021 - 2022 » « Semestre 1 »

2ème Bac. Comptabilité

DS n°2 [Modèle n° 2]

EX.1 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$U_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{2}{3}$

1°/ Calculer U_1 et U_2.

2°/ Posons : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = -\frac{4}{3} - U_n$

2°-a) Vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

2°-b) Mq : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2°-c) En déduire U_n en fonction de n et calculer $\lim U_n$.

EX.2 Soit f la fonction définie par l'expression :

$$f(x) = \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

1°/ Déterminer D le domaine de définition de f.

2°/ Vérifier que : $(\forall x \in D)$; $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

3°/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

4°/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (2x-1)]$; en déduire que la droite $(\Delta) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $(+\infty)$.

5°/ Etudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (Δ)

6°/ Calculer $f(1)$ et construire $(\mathscr{C}_f)$

— * fin * —

Correction du modèle n°2 du DS.n°2

EXERCICE 1 :

$u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}$

1°/ $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\times 0 - \frac{2}{3} = 0 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{-2}{3}}$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{\cancel{2}}\times\left(-\frac{\cancel{2}}{3}\right) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = \boxed{-1}$

2°/ $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = -\frac{4}{3} - u_n$

2°- a) Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = -\frac{4}{3} - u_{n+1} = -\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}\right)$

$= -\frac{4}{3} - \frac{1}{2}u_n + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}u_n$

$= \frac{-4+2}{3} - \frac{1}{2}u_n = \frac{-2}{3} - \frac{1}{2}u_n = \frac{2}{2}\times\frac{-2}{3} - \frac{1}{2}u_n$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2(-2)}{3} - u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{-\frac{4}{3} - u_n}_{v_n}\right) = \frac{1}{2}v_n$

donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

2°- b) Comme (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = q^n v_0$

avec : $v_0 = -\frac{4}{3} - u_0 \quad \left(\text{car } v_n = -\frac{4}{3} - u_n\right)$

$= -\frac{4}{3} - 0 = \boxed{-\frac{4}{3}}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \boxed{-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

2°- c) <u>u_n en fonction de n :</u>

on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = -\frac{4}{3} - u_n$

donc : $u_n = -v_n - \frac{4}{3}$

$= -\left(-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - \frac{4}{3}$

c-à-d : $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$

* $\underline{\lim U_n}$:

on a : $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc : $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc : $\lim U_n = \lim \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$

$$= \frac{4}{3} \times 0 - \frac{4}{3} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

EXERCICE.2 :

$$f(x) = \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$$

1°/ $D = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{x} \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x > 0\}$

$=]0 \ ; +\infty[$

2°/ Soit $x \in D$ on a :

$$f(x) = \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= 2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3°/ on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$

$$= \text{“} \frac{-1}{0^+} \text{”} = \boxed{-\infty.}$$

<u>interprétation</u> : $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

4°/ on a : $f(x) - (2x - 1) = \left(2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - (2x - 1)$

$$= \cancel{2x} - \cancel{1} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \cancel{2x} + \cancel{1} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (2x - 1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ 3

Déduction : La droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $(+\infty)$.

5/ Position (relative) de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) :

Le signe de $(f(x) - y)$.

on a : $f(x) - y = -\frac{1}{\sqrt{x}} < 0$ pour tout $x \in D$

donc $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus (تحت) de la droite (Δ). (sur D).

6/ $f(1) = \frac{2 - 1 - 1}{1} = \frac{2-2}{1} = \boxed{0}$

Construction de $(\mathcal{C}_f)$: